



MÉTODO DE DETERMINANTES

Es una notación matemática formada por una tabla cuadrada de números y está formada por una Matriz Cuadrada.

El orden de una determinante cuadrada es el número de elementos de cada fila o columna, por ejemplo:

$$\begin{array}{cc} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{array} \quad \text{Determinante de segundo orden}$$

$$\begin{array}{ccc} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{array} \quad \text{Determinante de tercer orden}$$

$$\begin{array}{cc} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{array}$$

Diagonal principal ($\searrow$) $a1, b2$

Diagonal secundaria ($\swarrow$) $b1, a2$

Solución del determinante: diagonal principal – diagonal secundaria

$$(a1 \times b2) - (b1 \times a2)$$

Ejemplo 1

$$V = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \therefore V = (6 \times [-5]) - ([-4] \times 3) \therefore V = (-30) - (-12) \therefore V = -30 + 12$$

$$V = -18$$

Ejemplo 2

Para la solución de un determinante de tercer orden se utiliza la regla de Sarrus, donde se repiten las 2 primeras filas de la matriz debajo de la tercera.

$$I = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & -2 & 1 & & \\ & 0 & 5 & -3 & \\ & 2 & 6 & 1 & \\ 4 & -2 & 1 & & \\ 0 & 5 & -3 & & \end{array}$$



$$I = \{(4 \times 5 \times 1) + (0 \times 6 \times 1) + (2 \times [-2] \times [-3])\} \\ - \{(1 \times 5 \times 2) + ([-3] \times 6 \times 4) + (1 \times [-2] \times 0)\}$$

$$I = \{(20) + (0) + (12)\} - \{(10) + (-72) + (0)\} \therefore I = 32 + 62 \therefore I = 94$$

SOLUCIÓN DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Para resolver un sistema de dos o tres ecuaciones se utiliza la regla de Cramer en los determinantes y se enuncia así:

En la solución de un sistema de ecuaciones el valor de cada incógnita es una fracción cuyo denominador es el determinante del sistema formado por los coeficientes de las incógnitas y cuyo numerador es el determinante que se obtiene sustituyendo en el determinante del sistema los coeficientes de dicha incógnita por los términos independientes de las ecuaciones.

Ejemplo 3

Ecuaciones:

$$2I_1 + I_2 = 23$$

$$3I_1 - 2I_2 = 3$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \therefore D = -4 - 3 \therefore D = -7$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 23 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{D} \therefore I_1 = \frac{-46 - 3}{-7} \therefore I_1 = 7$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 23 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{D} \therefore I_2 = \frac{6 - 69}{-7} \therefore I_2 = 9$$

Ejemplo 4

Ecuaciones:

$$3I_1 + 2I_2 + I_3 = 7$$

$$I_1 + 3I_2 - I_3 = 12$$

$$2I_1 + I_2 + 3I_3 = -1$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \therefore D = 15$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{D} \therefore I_1 = \frac{15}{15} \therefore I_1 = 1$$

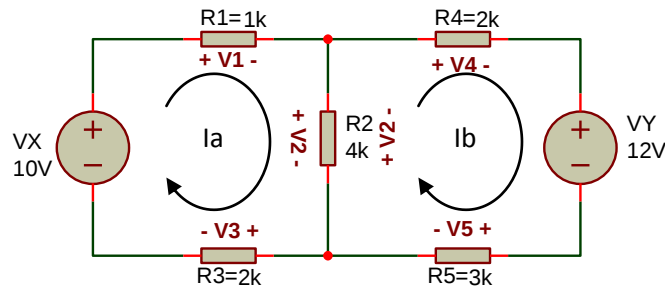
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 12 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{D} \therefore I_2 = \frac{45}{15} \therefore I_2 = 3$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{D} \therefore I_3 = \frac{-30}{15} \therefore I_3 = -2$$

SOLUCIÓN DE CIRCUITOS POR DETERMINANTES

Ejemplo 5

Asignamos las corrientes en las mallas A y B en el sentido de las manecillas del reloj.



Aplicamos ley de Kirchhoff de voltaje en cada malla:

Malla A:

$$V_x = V_1 + V_2 + V_3$$

Aplicando la ley de ohm ($V=IR$)

$$10 = R_1 \times I_a + R_2(I_a - I_b) + R_3 \times I_a$$

$$10 = I_a + 4(I_a - I_b) + 2I_a \therefore 10 = I_a + 4I_a - 4I_b + 2I_a$$

$$10 = 7I_a - 4I_b \rightarrow \text{Ecuación 1}$$



$$0 = V_2 + V_4 + V_y + V_5$$

Aplicando la ley de ohm ($V=IR$)

$$0 = R_2(I_b - I_a) + R_4 \times I_b + V_y + R_5 \times I_b$$

$$0 = 4(I_b - I_a) + 2I_b + V_y + 3I_b \therefore 0 = 4I_b - 4I_a + 2I_b + 12 + 3I_b$$

$$-12 = -4I_a + 9I_b \rightarrow \text{Ecuación 2}$$

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} \therefore D = 63 - 16 \therefore D = 47$$

$$I_a = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -12 & 9 \end{vmatrix}}{D} \therefore I_a = \frac{90 - 48}{47} \therefore I_a = \frac{42}{47} \therefore I_a = 0,89\text{mA} = I_1 = I_3$$

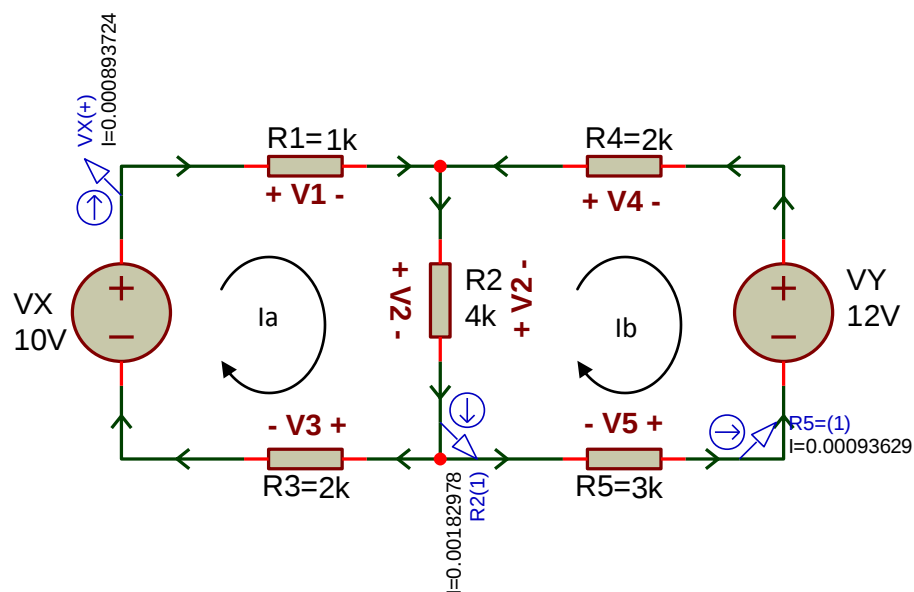
$$I_b = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ -4 & -12 \end{vmatrix}}{D} \therefore I_b = \frac{-84 + 40}{47} \therefore I_b = \frac{-44}{47} \therefore I_b = -0,93\text{mA} = I_4 = I_5$$

Como el resultado de I_b dio un valor negativo, significa que realmente la dirección es contraria a la asignada.

La asignación de las corrientes I_a e I_b tienen direcciones contrarias cuando pasan por R_2 , entonces se sustrae del valor mayor el valor menor y la dirección de la corriente es la del mayor valor.

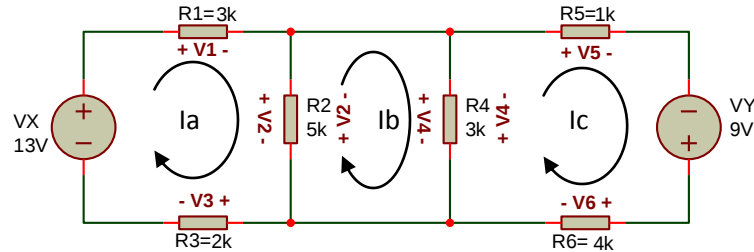
$$I_2 = I_a - I_b \therefore I_2 = 0,89\text{mA} - (-0,93\text{mA}) \therefore I_2 = 1,82\text{mA}$$

Como el resultado de la corriente I_2 es positiva, la dirección es la asignada a la corriente I_a .



Ejemplo 6

Asignamos las corrientes en las mallas A, B y C en el sentido de las manecillas del reloj.



Aplicamos ley de Kirchhoff de voltaje en cada malla:

Malla A:

$$V_X = V_1 + V_2 + V_3$$

Aplicando la ley de ohm ($V=IR$)

$$13 = R_1 \times I_a + R_2(I_a - I_b) + R_3 \times I_a$$

$$13 = 3I_a + 5(I_a - I_b) + 2I_a \therefore 13 = 3I_a + 5I_a - 5I_b + 2I_a$$

$$13 = 10I_a - 5I_b \rightarrow \text{Ecuación 1}$$

Malla B:

$$0 = V_2 + V_4$$

Aplicando la ley de ohm ($V=IR$)

$$0 = R_2(I_b - I_a) + R_4(I_b - I_c)$$

$$0 = 5I_b - 5I_a + 3I_b - 3I_c \therefore 0 = -5I_a + 8I_b - 3I_c$$

$$0 = -5I_a + 8I_b - 3I_c \rightarrow \text{Ecuación 2}$$

Malla C:

$$V_Y = V_4 + V_5 + V_6$$

Aplicando la ley de ohm ($V=IR$)

$$9 = R_4(I_c - I_b) + R_5 \times I_c + R_6 \times I_c$$

$$9 = 3I_c - 3I_b + I_c + 4I_c \therefore 9 = -3I_b + 8I_c$$

$$9 = -3I_b + 8I_c \rightarrow \text{Ecuación 3}$$

$$D = \begin{vmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix} \therefore D = (640 + 0 + 0) - (0 + 90 + 200) \therefore D = 640 - 290$$

$$D = 350$$



$$I_a = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -5 & 0 \\ 0 & 8 & -3 \\ 9 & -3 & 8 \end{vmatrix}}{D} \therefore I_a = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -5 & 0 \\ 0 & 8 & -3 \end{vmatrix} - (0 + 117 + 0)}{350}$$

$$I_a = \frac{967 - 117}{350} \therefore I_a = 2,42mA = I_1 = I_3$$

$$I_b = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 13 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 8 \end{vmatrix}}{D} \therefore I_b = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 13 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} - (0 - 270 - 520)}{350}$$

$$I_b = \frac{0 + 790}{350} \therefore I_b = 2,25mA$$

$$I_c = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 & 13 \\ -5 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \end{vmatrix}}{D} \therefore I_c = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 & 13 \\ -5 & 8 & 0 \end{vmatrix} - (0 + 0 + 225)}{350}$$

$$I_c = \frac{915 - 225}{350} \therefore I_c = 1,97mA = I_5 = I_6$$

La corriente que circula por R2 es la corriente Ia menos la corriente Ib y con la dirección de la corriente Ia.

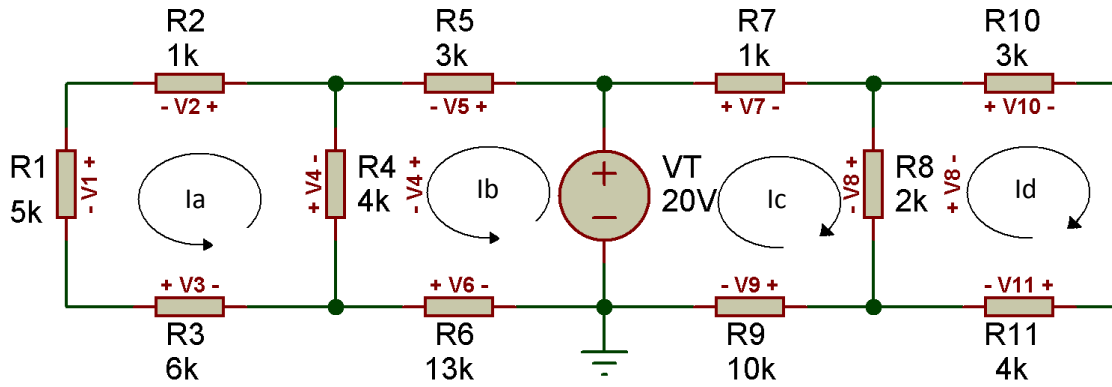
$$I_2 = I_a - I_b \therefore I_2 = 2,42mA - 2,25mA \therefore I_2 = 0,17mA$$

La corriente que circula por R4 es la corriente Ib menos la corriente Ic y con la dirección de la corriente Ib.

$$I_4 = I_b - I_c \therefore I_4 = 2,25mA - 1,97mA \therefore I_4 = 0,28mA$$

Ejemplo 7

Asignamos las corrientes en las mallas A, B, C y D en el sentido de las manecillas del reloj.



Aplicamos ley de Kirchhoff de voltaje en cada malla:

Malla A:

$$0 = V2 + V1 + V3 + V4$$

Aplicando la ley de ohm ($V=IR$)

$$0 = R2 \times I_a + R1 \times I_a + R3 \times I_a + R4(I_a - I_b)$$

$$0 = I_a + 5I_a + 6I_a + 4I_a - 4I_b$$

$$0 = 16I_a - 4I_b \rightarrow \text{Ecuación 1}$$

Malla B:

$$VT = V5 + V4 + V6$$

Aplicando la ley de ohm ($V=IR$)

$$VT = I_b \times R5 + R4(I_b - I_a) + R6 \times I_b$$

$$20 = 3I_b + 4I_b - 4I_a + 13I_b$$

$$20 = -4I_a + 20I_b \rightarrow \text{Ecuación 2}$$

Malla C:

$$VT = V7 + V8 + V9$$

Aplicando la ley de ohm ($V=IR$)

$$20 = R7 \times I_c + R8(I_c - I_d) + R9 \times I_c$$

$$20 = I_c + 2I_c - 2I_d + 10I_c$$

$$20 = 13I_c - 2I_d \rightarrow \text{Ecuación 3}$$

Malla D:

$$0 = V10 + V11 + V8$$

Aplicando la ley de ohm ($V=IR$)

$$0 = R10 \times I_d + R11 \times I_d + R8(I_d - I_c)$$

$$0 = 3I_d + 4I_d + 2I_d - 2I_c$$

$$0 = -2I_c + 9I_d \rightarrow \text{Ecuación 4}$$



Para calcular el determinante de una matriz 4x4 (o superior) se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Elegir la fila o la columna que tenga mayor cantidad de ceros.
- En caso de no haber, elija la fila o la columna que tenga el valor más grande.

Solucionamos primero el denominador (D) del determinante ya que será el denominador común para la solución de todos los determinantes de las variables de la Corriente Eléctrica (I_a , I_b , I_c e I_d).

El método de solución se llama por cofactores y en este ejemplo elegimos la columna 1:

$$D = \begin{vmatrix} I_a & I_b & I_c & I_d \\ 16 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

El método de solución se llama por cofactores y elegimos la columna 1 y el primer signo es el perteneciente a la posición del cofactor:

$$D = + (16) \times \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} - (-4) \times \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} + (0) \times |0| - (0) \times |0|$$

$$D = 16[(2340) - (80)] + 4[(-468) - (-16)] \therefore D = 36160 - 1808 \therefore D = 34352$$

Hallamos I_a :

$$\begin{array}{cccc} Kte & I_b & I_c & I_d \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{array} \rightarrow \text{Elegida la columna 1}$$

$$I_a = \frac{34352}{34352}$$

$$I_a = (0) \times |0| - (20) \times \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} + (20) \times \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} - (0) \times |0|$$



$$I_a = \frac{-20[(-468) - (-16)] + 20[(0) - (0)]}{34352} \therefore I_a = \frac{9040}{34352} \therefore I_a = 0,263mA$$

Hallamos Ib:

$$\begin{array}{cccc} I_a & Kte & I_c & I_d \\ 16 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{array} \rightarrow \text{Elegida la columna 2}$$
$$I_b = \frac{0}{34352}$$

$$I_b = -(0) \times |0| + (20) \times \begin{vmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} - (20) \times \begin{vmatrix} 16 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} + (0) \times |0|$$

$$I_b = \frac{20[(1872) - (64)] - 20[(0) - (0)]}{34352} \therefore I_b = \frac{36160}{34352} \therefore I_b = 1,052mA$$

Hallamos Ic:

$$\begin{array}{cccc} I_a & I_b & Kte & I_d \\ 16 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \rightarrow \text{Elegida la columna 3}$$
$$I_c = \frac{0}{34352}$$

$$I_c = +(0) \times |0| - (20) \times \begin{vmatrix} 16 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} + (20) \times \begin{vmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} - (0) \times |0|$$

$$I_c = \frac{-20[(0) - (0)] + 20[(2880) - (144)]}{34352} \therefore I_c = \frac{54720}{34352} \therefore I_c = 1,592mA$$

Hallamos Id:

$$\begin{array}{cccc} I_a & I_b & I_c & Kte \\ 16 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 13 & 20 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Elegida la columna 4}$$
$$I_d = \frac{0}{34352}$$



$$I_d = - (0) \times \begin{vmatrix} 16 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (20) \times \begin{vmatrix} 16 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 16 & -4 & 0 \end{vmatrix} - (20) \times \begin{vmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (0) \times \begin{vmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 20 & 0 \end{vmatrix}$$
$$I_d = \frac{20[(0) - (0)] - 20[(-640) - (-32)]}{34352} \therefore I_d = \frac{12160}{34352} \therefore I_d = 0,353mA$$

Ahora, se analiza cada malla y por propiedades de los circuitos la corriente en un circuito serie es la misma; para las resistencias que comparten dos mallas se debe restar del valor mayor el menor.

$$I_a = I_1 = I_2 = I_3 = 0,263mA \text{ (por estar en serie)}$$

I_b e I_a comparten la R_4 , entonces de la mayor se resta la menor y esa será la corriente que pasa por R_4 y con la dirección de la mayor, entonces:

$$I_4 = I_b - I_a \therefore I_4 = 0,789mA$$

$$I_b = I_5 = I_6 = 1,052mA \text{ (por estar en serie)}$$

$$I_c = I_7 = I_9 = 1,592mA \text{ (por estar en serie)}$$

I_c e I_d comparten la R_8 , entonces de la mayor se resta la menor y esa será la corriente que pasa por R_8 y con la dirección de la mayor, entonces:

$$I_8 = I_c - I_d \therefore I_8 = 1,239mA$$

$$I_d = I_{10} = I_{11} = 0,353mA \text{ (por estar en serie)}$$

Por ley de ohm: $V = I \times R$

$$V_1 = I_1 \times R_1 \therefore V_1 = 1,315v$$

$$V_2 = I_2 \times R_2 \therefore V_2 = 0,263v$$

$$V_3 = I_3 \times R_3 \therefore V_3 = 1,578v$$

$$V_4 = I_4 \times R_4 \therefore V_4 = 3,156v$$

$$V_5 = I_5 \times R_5 \therefore V_5 = 3,156v$$

$$V_6 = I_6 \times R_6 \therefore V_6 = 13,676v$$

$$V_7 = I_7 \times R_7 \therefore V_7 = 1,592v$$

$$V_8 = I_8 \times R_8 \therefore V_8 = 2,478v$$

$$V_9 = I_9 \times R_9 \therefore V_9 = 15,92v$$

$$V_{10} = I_{10} \times R_{10} \therefore V_{10} = 1,059v$$

$$V_{11} = I_{11} \times R_{11} \therefore V_{11} = 1,412v$$



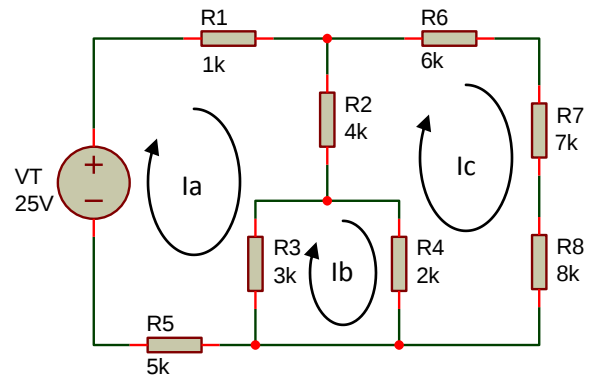


EJEMPLOS PROPUESTOS

1) ¿Halle I_a , I_b , I_c , V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , V_8 ?

Respuestas:

$I_a = 2,53\text{mA}$; $I_b = 2,32\text{mA}$; $I_c = 1,46\text{mA}$,
 $V_1 = 2,53\text{v}$; $V_2 = 4,28\text{v}$; $V_3 = 0,63\text{v}$; $V_4 = 1,72\text{v}$; $V_8 = 11,68\text{v}$



2) ¿Halle I_a , I_b , I_c , V_2 , V_3 , V_4 ?

Respuestas:

$I_a = 2,25\text{mA}$; $I_b = 0,675\text{mA}$; $I_c = 0,728\text{mA}$; $V_2 = 3,15\text{v}$; $V_3 = 4,56\text{v}$; $V_4 = 0,212\text{v}$

